



**Une approche bayésienne de l'identification des constantes élastiques orthotropes de pli à partir de tests de vibration de flexion sur stratifié = A Bayesian approach to identification of orthotropic elastic constants of the ply from vibration tests on a laminate**

Christian Gogu, Rodolphe Le Riche, Jérôme Molimard, Alain Vautrin,  
Raphael T. Haftka

► **To cite this version:**

Christian Gogu, Rodolphe Le Riche, Jérôme Molimard, Alain Vautrin, Raphael T. Haftka. Une approche bayésienne de l'identification des constantes élastiques orthotropes de pli à partir de tests de vibration de flexion sur stratifié = A Bayesian approach to identification of orthotropic elastic constants of the ply from vibration tests on a laminate. JNC 16, Jun 2009, Toulouse, France. 10 p. hal-00393734

**HAL Id: hal-00393734**

**<https://hal.science/hal-00393734>**

Submitted on 11 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une approche bayésienne de l'identification des constantes élastiques orthotropes de pli à partir de tests de vibration de flexion sur stratifié

## *A Bayesian approach to identification of orthotropic elastic constants of the ply from vibration tests on a laminate*

Christian Gogu<sup>1,2</sup>, Rodolphe Le Riche<sup>1</sup>, Jérôme Molimard<sup>1</sup>, Alain Vautrin<sup>1</sup> et Raphael Haftka<sup>2</sup>

1 : Département de Mécanique et Procédés d'Elaboration  
Ecole des Mines de Saint Etienne – F - 42023 SAINT ETIENNE CEDEX 2  
e-mail : christian.gogu@gmail.com, leriche@emse.fr, molimard@emse.fr, vautrin@emse.fr

2 : Département d'Ingénierie Mécanique et Aérospatiale  
Université de Floride – USA - 32611 GAINESVILLE, FL  
e-mail : haftka@ufl.edu

### Résumé

L'identification bayésienne est une des approches permettant de prendre en considération des erreurs de mesure ainsi que de modélisation. De plus, cette méthode identifie une densité de probabilité, permettant ainsi d'avoir des informations aussi bien sur la variance que sur la corrélation des propriétés identifiées. Cette procédure peut cependant être très coûteuse en temps de calcul. Pour réduire ce temps de calcul nous proposons ici une approche bayésienne basée sur la méthode des surfaces de réponse. L'approche est appliquée au problème de l'identification de constantes élastiques orthotropes à partir des mesures des fréquences propres d'une plaque vibrante libre. La procédure développée prend en compte des erreurs de mesures, de l'incertitude sur les autres paramètres d'entrée du modèle (dimensions de la plaque, densité), ainsi que des erreurs systématiques. La densité de probabilité jointe des quatre constantes élastiques du pli est identifiée et caractérisée par ses valeurs moyennes et la matrice de variance covariance. Nous trouvons que certaines paramètres, comme le coefficient de Poisson, sont identifiées avec une bien plus grande incertitude que d'autres et qu'une corrélation significative existe entre les différentes propriétés identifiées.

### Abstract

Bayesian identification provides a framework that can handle both measurement and modeling errors. Furthermore it identifies a probability distribution function thus providing information on both variance and correlation of the identified properties. However, the procedure can be very costly computationally. In order to address the computational cost issue a Bayesian identification procedure based on response surface methodology is proposed. The procedure is applied to the problem of identifying orthotropic elastic constants from natural frequencies of a free composite plate. The framework accounts for measurement noise, uncertainty in other input parameters to the vibration model (plate dimensions, density) as well as systematic error effects. The joint probability distribution of the four elastic ply constants is identified and characterized by mean values and variance-covariance matrix. We find that some properties, such as Poisson's ratio, are identified with much higher uncertainty than the other and that significant correlation between the identified properties is present.

**Mots Clés** : identification bayésienne, constantes élastiques du pli, vibration de plaques, méthode des surface de réponse

**Keywords** : Bayesian identification, ply elastic constants, plate vibration, response surface methodology

## 1. Introduction

La détermination la plus précise possible des constantes élastiques orthotropes a toujours été un défi à relever pour la communauté des matériaux composites. Ce défi comporte trois éléments : concevoir l'expérience la mieux adaptée en vue d'identifier les propriétés recherchées ; prendre en considération les incertitudes inhérentes à l'essai et la modélisation de l'essai et enfin estimer et contrôler l'incertitude avec laquelle les propriétés sont identifiées.

La conception d'un essai en vue de l'identification simultanée des quatre constantes élastiques orthotropes a été un riche domaine d'investigation [1]-[6]. Les essais vibratoires sont considérés comme une

méthode efficace pour cela. La technique d'identification associée a été introduite par De Wilde et al. [7],[8] et Deobald et Gibson [9] dans le contexte de l'identification des constantes élastiques de composites. Il s'agissait dans ces études de mesurer les fréquences propres d'un stratifié soumis à des conditions aux limites libres, fréquences qui seraient ensuite utilisées pour identifier les constantes élastiques par des méthodes itératives de mise à jour de modèle. Parmi les avantages de l'identification à partir d'essais vibratoires mentionnées dans [7]-[11] figurent : essai unique de nature non-destructive et détermination des propriétés homogénéisées sur la surface de la plaque au lieu de propriétés locales qu'on aurait pu avoir en utilisant des jauges. Il est à noter cependant que les essais vibratoires sont généralement mieux adaptés à l'identification des propriétés homogénéisées du stratifié plutôt que des propriétés du pli. Dans la présente étude nous fixons l'expérience à un essai de vibration et abordons les deux points précédents relatifs à la gestion des incertitudes.

Des nombreuses améliorations apportées aux techniques d'identification cherchaient à fournir une estimation plus précise des paramètres matériaux. Mais il est aussi important de connaître l'incertitude avec laquelle ces paramètres sont identifiés. Il est en effet bien connu que des paramètres tels que le coefficient de Poisson ou le module de cisaillement sont généralement déterminés avec plus d'incertitude à partir d'essais cherchant à identifier simultanément les quatre propriétés. Pour pouvoir quantifier cette incertitude une des approches possibles est la méthode bayésienne, qui va identifier la densité de probabilité des paramètres matériaux.

Pour déterminer l'incertitude dans les paramètres de sortie (constantes élastiques) il faut cependant avoir une estimation des incertitudes dans les paramètres d'entrée du modèle (incertitudes de mesure, de modélisation). Il y a plusieurs sources d'incertitude possible : en premier lieu, on peut avoir une incertitude sur les mesures de fréquences propres ; ensuite il peut y avoir une incertitude sur les autres paramètres d'entrée du modèle (par exemple dimensions et densité de la plaque). Enfin il peut y avoir une incertitude sur les capacités prédictives du modèle numérique utilisé. L'approche bayésienne que nous proposons permet de tenir compte de toutes ces sources d'incertitude pour déterminer l'incertitude (variance et corrélation) sur les constantes élastiques identifiées.

Plusieurs auteurs ont appliqué une méthode d'identification bayésienne par le passé. Sol a probablement été le premier à appliquer une approche bayésienne à ce problème d'identification des constantes élastiques des composites [12]. Plusieurs autres études ont suivi depuis [13]-[16], cependant la plupart de ces études se limitaient à appliquer la méthode bayésienne pour obtenir une estimation plus précise de constantes élastiques. Seulement [14] calculait également les valeurs de l'écart type de la densité de probabilité identifiée. En ce qui concerne la modélisation de l'incertitude, le seul type d'erreur considéré était l'erreur de mesure dans les fréquences propres, erreur qui était supposée gaussienne. Une telle hypothèse rend possible un calcul purement analytique dans l'approche bayésienne ce qui en limite le coût en temps de calcul. Dans notre approche nous souhaitons cependant tenir compte également d'autres types d'incertitudes (incertitudes sur les paramètres d'entrée, erreurs de modélisation) ce qui nécessite d'utiliser la méthode de simulation de Monte Carlo. Ceci augmente beaucoup le temps de calcul de la méthode. Un défi majeur pour pouvoir rendre compte des autres types d'incertitudes réside dans le développement de techniques permettant d'effectuer la simulation de Monte Carlo à un coût raisonnable. Pour relever ce défi nous proposons ici d'utiliser une méthode bayésienne basée sur des approximations par surface de réponse des fréquences propres.

L'objectif de cet article est alors d'identifier la densité de probabilité des quatre constantes élastiques orthotropes du pli à partir de mesures de fréquences propres sur un stratifié. Nous utilisons pour cela une approche bayésienne qui permet de rendre compte de trois types d'incertitudes : incertitudes de mesure sur les fréquences propres, incertitudes sur les autres paramètres d'entrée du modèle et enfin incertitude de modélisation.

## 2. Le problème vibratoire

Nous cherchons à identifier les quatre constants élastiques du pli d'une plaque mince stratifiée:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ . Dans la présente étude nous utilisons les mesures expérimentales faites par Pedersen et Frederiksen [17] réalisées sur une plaque mince en fibre de verre/époxy ayant l'empilement suivant  $[0,-40,40,90,40,0,90,-40]_s$ . La plaque rectangulaire avait les dimensions données dans le Tableau 1. La plaque était accrochée par deux fils ce qui est supposé modélisable de manière satisfaisante par des conditions aux limites libres sur les quatre cotés. Les dix premières fréquences mesurées ont été mesurées ; elles sont reproduites Tableau 2.

Paramètre	a (mm)	b (mm)	h (mm)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Valeur	209	192	2,59	2120

Tab. 1. Propriétés de la plaque: longueur (a), largeur (b), épaisseur (h) et densité ( $\rho$ ).

Fréquence	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$
Valeur (Hz)	172,5	250,2	300,6	437,9	443,6	760,3	766,2	797,4	872,6	963,4

Tab. 2. Mesures expérimentales des fréquences propres de Pedersen et Frederiksen [17].

Dans [17] Pedersen et Frederiksen ont utilisé une approche par moindres carrés pour identifier les constants du pli  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ . Pour cela ils ont minimisé la fonction coût suivante :

$$J(E) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{f_i^{\text{num}}(E) - f_i^{\text{mesure}}}{f_i^{\text{mesure}}} \right)^2 \quad (1)$$

où  $E = \{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}$ ,  $f_i^{\text{mesure}}$  est la  $i^{\text{ème}}$  fréquence mesurée du Tableau 2 et  $f_i^{\text{num}}$  est la prédiction d'un modèle numérique (la méthode de Rayleigh-Ritz a été utilisée dans [17]).

### 3. L'identification bayésienne

#### a. Principe fondamental

Dans l'étude présente nous appliquons une méthode bayésienne au problème décrit précédemment. La méthode bayésienne est fondée sur l'application de la loi de Bayes qui donne la probabilité d'un événement  $A$  sachant qu'un événement  $B$  s'est produit (cf. Eq. 2). Souvent  $P(A)$  est appelée probabilité à priori de  $A$ ,  $P^{\text{prior}}(A)$ , pour la distinguer de la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , qui est aussi appelée probabilité (de  $A$ ) à posteriori (de  $B$ ).

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (2)$$

Pour appliquer la loi de Bayes à l'identification de paramètres matériaux notons  $X$  la variable aléatoire des propriétés matériaux à identifier ( $x$  est une instance de  $X$ ). Sa densité de probabilité est notée  $\pi(x)$ . De même  $Y$  est la variable aléatoire de la prédiction de la réponse mesurée (les fréquences propres ici) et  $\pi(y)$  sa densité. Il faut noter que l'incertitude sur  $Y$  n'est pas uniquement due à l'incertitude sur les paramètres matériaux mais peut être également due à l'incertitude sur les autres paramètres (dimensions, charges, etc).

Nous pouvons maintenant introduire  $X/Y=y^\circ$ , la variable aléatoire  $X$  sachant qu'on a observé  $Y=y^\circ$ ;  $\pi(x/Y=y^\circ)$  étant sa densité de probabilité. De même on définit  $\pi(y^\circ/X=x)$ , qui est également appelée vraisemblance de  $X$  sachant  $y^\circ$ . La loi de Bayes étendue à des densités de probabilité continues donne alors la densité des paramètres matériaux  $x$  sachant qu'on a mesuré  $Y=y^\circ$  :

$$\pi(x/Y=y^\circ) = \frac{\pi(y^\circ/X=x) \cdot \pi^{\text{prior}}(x)}{\int \pi(y^\circ/X=x) \cdot \pi^{\text{prior}}(x) \cdot dx} = \frac{1}{K} \cdot \pi(y^\circ/X=x) \cdot \pi^{\text{prior}}(x) \quad (3)$$

où l'intégrale au dénominateur est une constante de normalisation appelée  $K$  dorénavant.

Pour plus de détails sur l'analyse bayésienne, on se référera à [18] et sur l'identification bayésienne à [19]. Appliquée au problème de vibration l'approche bayésienne peut s'écrire :

$$\pi(E/f=f^{\text{mesure}}) = \frac{1}{K} \pi(f=f^{\text{mesure}}/E) \cdot \pi^{\text{prior}}(E) \quad (4)$$

où  $E = \{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}$  est la variable aléatoire quadridimensionnelle des paramètres matériaux à identifier,  $f = \{f_1 \dots f_{10}\}$  la variable aléatoire des fréquences propres de la plaque et  $f^{\text{mesure}} = \{f_1^{\text{mesure}} \dots f_{10}^{\text{mesure}}\}$  est l'instance des dix fréquences propres mesurées.

L'équation 4 donne la densité jointe de probabilité des quatre constantes élastiques sachant qu'on a mesuré  $f^{\text{mesure}}$ . Cette densité est égale à une constante de normalisation multipliée par la fonction de vraisemblance des constantes élastiques sachant les mesures multipliée par la distribution à priori des constantes  $E$ . La distribution à priori de  $E$  reflète la connaissance qu'on a de  $E$  avant de faire les expériences. Cette connaissance peut être basée sur des spécifications du fabricant des composites par exemple. Cette densité a un rôle de régularisation, en réduisant la vraisemblance des valeurs de  $E$  qui sont trop loin des valeurs attendues. Dans notre cas nous avons supposé un à priori relativement vague en considérant une distribution à priori ayant un écart type large (cf. Tab. 3).

Paramètre	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (GPa)
Valeur moyenne	60	21	0,28	10
Ecart type	10	5	0,05	1,5

Tab. 3. Paramètres de la densité à priori normale, non corrélée.

L'autre terme du coté droit de l'égalité de l'Eq. 4 est la fonction de vraisemblance des constantes élastiques sachant les mesures. Cette fonction mesure la probabilité d'obtenir les mesures pour une valeur donnée des constantes élastiques, mesurant ainsi la vraisemblance des différentes valeurs de  $E$  sachant les mesures. Notez qu'il y a de l'aléa dans les fréquences propres car pour une valeur donnée de  $E$  nous devons calculer la probabilité d'obtenir les mesures. Cet aléa peut avoir différentes causes.

La première cause possible est l'erreur de mesure. Les études précédentes [12]-[16] ont supposé que c'est la seule source d'incertitude et que cette incertitude est normalement distribuée. Ces hypothèses rendent possible un traitement purement analytique de la fonction de vraisemblance ce qui implique un temps de calcul très réduit. Dans notre étude nous supposons une erreur de mesure uniformément distribuée. Notez que nous ne disposons pas d'assez d'éléments pour déterminer pour l'expérience analysée laquelle des incertitudes normale ou uniforme est la plus vraisemblable. Déterminer la structure exacte de l'incertitude de mesure demanderait une analyse détaillée de propagation des différentes sources d'incertitude pour la procédure de mesure des fréquences utilisée. Si nous avions cette structure d'incertitude nous pourrions l'incorporer dans notre procédure de calcul de la fonction de vraisemblance, contrairement aux approches analytiques qui ne peuvent considérer qu'une incertitude gaussienne. Notre procédure permet d'utiliser n'importe quelle structure d'incertitude car nous utilisons la simulation de Monte Carlo. Pour illustrer cette capacité de notre procédure à considérer une incertitude de mesure autre que normale nous avons supposé ici une incertitude uniforme. Selon la source exacte des incertitudes de mesure cette distribution peut être plus vraisemblable qu'une distribution normale.

Une autre source d'incertitude possible est l'erreur de modélisation. Deux sources possibles ont été identifiées : l'utilisation de la théorie de plaques minces est une approximation qui peut bien marcher pour les premiers modes mais qui peut être plus discutable pour les modes élevés, à cause de leur longueur d'onde plus courte. L'autre erreur de modélisation possible peut être l'erreur de discrétisation qui augmente également avec le numéro du mode à cause de leur forme plus complexe.

Enfin une autre source d'incertitude possible sur les paramètres identifiés peut venir de l'incertitude dans la connaissance des dimensions de la plaque et sa densité.

Dans la section suivante nous allons développer un modèle d'erreur pour ces paramètres et nous allons utiliser la simulation de Monte Carlo pour propager leurs incertitudes aux fréquences propres et obtenir ainsi la fonction de vraisemblance.

## b. Modèle d'erreur

Nous avons décidé de modéliser conjointement l'erreur de mesure et l'erreur de modélisation de la manière suivante : nous supposons que les fréquences propres sont bruitées par une distribution uniforme définie comme suit.

$$f_m = f_m^{\text{response}} + u_m \quad (5)$$

où  $f_m^{\text{response}}$  est la  $m^{\text{ème}}$  fréquence propre de la plaque obtenue d'après la théorie de plaques minces et  $u_m$  est une variable aléatoire uniformément distribuée modélisant l'erreur.

Cette erreur a été supposée ne pas être centrée en les fréquences expérimentales (i.e. la moyenne de  $u_m$  n'est pas nulle) à cause d'erreurs de modélisation (différence plaque mince-plaque épaisse, erreur de discrétisation etc). En effet même si nous avons une plaque mince (cf. dimensions Tableau 1), les effets du cisaillement transverse peuvent devenir non négligeables en particuliers pour les modes élevés qui ont des longueurs d'onde plus faibles. La différence reste cependant faible et changera peu au cours de la procédure de mise à jour des paramètres. Par conséquent nous avons estimé cette différence, qui a été supposée ne pas varier pendant la mise à jour des paramètres matériaux, en utilisant les valeurs moyennes de la distribution à priori des quatre constantes élastiques (cf. Tab. 3). Pour le cisaillement transverse nous avons utilisé  $G_{13} = G_{12}$  et  $G_{23} = 0.9 G_{12}$ , valeurs typiques pour le composite fibre de verre/époxy utilisé.

Notez qu'il aurait été possible d'utiliser directement une théorie de plaque épaisse pour le modèle numérique. Nous avons cependant décidé d'utiliser un modèle de plaque mince parce que nous devons construire des approximations par surface de réponse des fréquences propres en vue de réduire le coût en temps de calcul de la procédure d'identification bayésienne. Comme nous l'avons montré dans [20], il se trouve que les fréquences propres par la théorie de plaques minces peuvent être exprimées avec une très bonne précision sous une forme polynomiale relativement simple. Les équations du mouvement plus complexes dans la théorie de plaques épaisses auraient nécessité d'utiliser des surfaces de réponse plus complexes sans toutefois pouvoir garantir une précision suffisante. Nous avons donc choisi d'utiliser la théorie de plaques minces et de modéliser la différence avec la théorie des plaques épaisses par le modèle d'erreur décrit ci-dessus.

Fréquence	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$
Différence	0,31%	0,03%	0,04%	0,29%	0,29%	0,10%	0,07%	0,42%	0,32%	0,23%

Tab. 4. Différence entre les fréquences obtenues avec la théorie des plaques minces et celle des plaques épaisses pour les valeurs moyennes de la distribution à priori (cf. Tab. 3) et  $G_{13} = G_{12}$ ,  $G_{23} = 0,9 G_{12}$ .



Le centre de la distribution uniforme de  $u_m$  est alors défini par la différence entre les deux modèles de plaques donnée dans le Tab. 4. Pour complètement définir le modèle d'erreur de l'Eq. 5 nous devons maintenant définir la largeur des intervalles de la distribution uniforme. Nous supposons que la largeur de l'intervalle augmente avec le numéro de la fréquence à cause des facteurs suivants :

- i. A cause du bruit il est plus difficile d'extraire numériquement les fréquences propres les plus élevées
- ii. Les modes élevés ont des fréquences plus élevées et des formes plus complexes et pourront donc mettre en jeu des phénomènes qui ont été considérés comme négligeables pour la fréquence fondamentale (effet de l'air environnant, amortissement, lois constitutives plus complexes, etc)

Par conséquence nous avons supposé que les bornes hautes/basses de la distribution uniforme sont de  $\pm 0.5\%$  pour le mode fondamental ( $m=1$ ) et  $\pm 2\%$  pour le mode mesuré le plus élevé ( $m=10$ ). Pour les  $m$  intermédiaires les bornes varient linéairement avec  $m$ .

A part l'erreur de modélisation et de mesure que nous venons juste de décrire nous tenons également compte dans la procédure bayésienne d'incertitudes sur les paramètres d'entrée du modèle de plaque mince. Ce modèle admet comme variables d'entrée, à part les quatre constantes élastiques, quatre autres paramètres : la longueur, largeur et épaisseur de la plaque ainsi que sa densité. Ces paramètres sont mesurés avant l'expérience et sont connues avec une précision donnée. Nous avons supposé des incertitudes sur ces paramètres tel que données dans le Tab. 5.

Paramètre	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Valeur moyenne	209	192	2,59	2120
Ecart type	0,25	0,25	0,01	10,6

Tab. 5. Incertitudes supposés sur la longueur ( $a$ ), largeur ( $b$ ), épaisseur ( $h$ ) et sa densité ( $\rho$ ). Des distributions normales sont utilisées.

### c. Procédure numérique

L'identification bayésienne requiert d'évaluer la distribution postérieure de probabilité, définie dans l'Eq. 4. La distribution à priori est une simple expression analytique (distribution normale caractérisée par le Tab. 3), le défi majeur consiste donc dans l'évaluation de la fonction de vraisemblance  $\pi(f = f^{mesure} / E^{fixé})$ . Nous construisons cette fonction point par point en l'estimant en les points d'une grille quadridimensionnelle en  $E = \{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}$ . Nous avons utilisé une grille de  $8^4$  points, taille qui est déterminée essentiellement par des considérations de temps de calcul. Une étude de convergence sera donnée dans la dernière section.

A chacun des points de la grille,  $E$  est fixé et nous devons évaluer la densité de probabilité des fréquences propres,  $\pi(f / E^{fixé})$ , au point  $f = f^{mesure}$ . La densité des fréquences propres est construite en propageant par simulation de Monte Carlo les incertitudes sur les paramètres d'entrée et le modèle d'erreur, définis dans la section précédente. Ceci est fait en deux étapes :

a. Propager les incertitudes normales sur les paramètres d'entrée (cf. Tab. 5) aux fréquences propres en utilisant la simulation de Monte Carlo. La variable aléatoire des fréquences propres due uniquement aux incertitudes sur les paramètres d'entrée (mais pas à l'erreur de mesure) est notée  $f^{entrée\_MC}$ .

b. Calculer le point de la fonction de vraisemblance en utilisant l'Eq. 6, qui rend compte de l'erreur de mesure et de modélisation  $u$  (cf. Eq. 5) :

$$\pi(f = f^{mesure} / E^{fixé}) = \int_{f^{mesure} - u^{lb}}^{f^{mesure} + u^{ub}} \pi(f^{entrée\_MC} / E^{fixé}) df^{entrée\_MC} \quad (6)$$

L'équation 6 est rendue possible par le fait que le modèle d'erreur  $u$  est uniformément distribué (entre les bornes  $[u^{lb}, u^{ub}]$ ). L'équation 6 revient donc à dire que la vraisemblance de mesurer les fréquences  $f^{mesure}$  est égale à la probabilité que les fréquences simulées  $f^{entrée\_MC}$  se trouvent à l'intérieur des bornes de l'incertitude de mesure  $[f^{mesure} - u^{lb}, f^{mesure} + u^{ub}]$ . L'intégrale de l'Eq. 6 est évaluée en comptant le nombre de fréquences à l'intérieur de  $[f^{mesure} - u^{lb}, f^{mesure} + u^{ub}]$  divisé par le nombre totale de fréquences simulées  $f^{entrée\_MC}$ . Nous avons utilisé 50000 simulations de Monte Carlo.

Dans un cas plus général, où l'incertitude de mesure ne serait plus uniformément distribuée pour permettre ainsi d'utiliser l'Eq. 6, la procédure suivante peut alors être utilisée. Pour chaque point  $E$  fixé sur la grille, simuler des valeurs pour les paramètres d'entrée incertains  $a$ ,  $b$ ,  $h$  et  $\rho$ , les propager aux fréquences propres et rajouter une valeur instanciée de l'incertitude de mesure et de modélisation  $u$ . Ceci produit un échantillon de fréquences simulées qui tient compte simultanément de toutes les incertitudes présentes. Il reste à évaluer cette densité de probabilité au point  $f = f^{mesure}$ , qui donnera directement la valeur de la fonction de vraisemblance au point  $E^{fixé}$  considéré,  $\pi(f = f^{mesure} / E^{fixé})$ . Pour ajuster une densité de probabilité aux échantillons des fréquences on peut utiliser l'histogramme empirique et une méthode d'ajustement par noyau.

Dans tous les cas nous serons confrontés à un problème de temps de calcul car la procédure bayésienne fait intervenir une étape de simulation de Monte Carlo chère. Pour chacun des  $8^4$  points de la grille nous devons en effet effectuer 50000 simulations de Monte Carlo des 10 premières fréquences propres. Ceci signifie que nous aurons au total environ 2 Milliards d'évaluations de fréquences à effectuer. Il est évident qu'utiliser directement un modèle numérique (tel qu'éléments finis) pour un tel nombre d'évaluations n'est pas envisageable.

Pour réduire le temps de calcul nous avons utilisé la méthodologie des surfaces de réponse. Les modèles par surface de réponse sont des approximations de la réponse du système obtenue à partir d'un faible nombre de points où la réponse est connue, à partir de simulations par éléments finis dans notre cas. La surface de réponse va ainsi remplacer le modèle numérique coûteux (éléments finis) sur un certain domaine des paramètres d'entrée. Des modèles typiques de surface de réponse sont les surfaces de réponse polynomiales, le krigeage, ou les réseaux de neurones. Pour une vue plus complète de la méthodologie des surfaces de réponse le lecteur peut se référer à [21].

Nous avons choisi d'approximer ici les fréquences propre par des surfaces de réponse polynomiales. Pour obtenir une meilleure précision et un coût de construction plus réduit nous avons décidé de construire de surfaces de réponse en termes de paramètres adimensionnels.

Posant  $\tau = \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D_{11}}}$ , qui est une constante de temps, nous définissons les paramètres adimensionnels

suivants :

$$\Psi_m = \tau f_m \quad \gamma = \frac{a}{b} \quad \Delta_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad \Delta_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}} \quad \Delta_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}}$$

où les  $D_{ij}$  sont les rigidités en flexion de la plaque. Pour une procédure pour calculer les  $D_{ij}$  à partir de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$  se référer à [22].

Pour plus de détails sur la procédure qui nous a permis de déterminer ces paramètres adimensionnels et la construction des surfaces de réponse le lecteur peut se référer à [20]. Nous en donnons un aperçu dans les lignes qui suivent. Dans [20] nous avons construit une surface de réponse de la fréquence adimensionnelle  $\Psi_m$  en fonction des autres paramètres adimensionnels. La forme de solutions analytiques approximatives [23] au problème de vibration a suggéré que  $\Psi_m^2$  peut s'écrire sous une forme polynomiale partielle de degré 3 en  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{22}$ ,  $\Delta_{66}$ , et  $\gamma^2$ . Nous avons donc cherché à construire une surface de réponse polynomiale (PRS) complète de degré 3 de  $\Psi_m^2$ :

$$\Psi_m^2 = PRS(\Delta_{12}, \Delta_{22}, \Delta_{66}, \gamma^2)$$

Les surfaces de réponse obtenues de cette manière se sont révélées être très précises. La moins bonne des approximations par surface de réponse était pour la 9<sup>ème</sup> fréquence propre pour laquelle nous avons obtenu les mesures d'erreur suivantes : coefficient de corrélation  $R^2 = 0.99998$ , erreur RMS (root mean square) de 0.01% de la valeur moyenne de la 9<sup>ème</sup> fréquence et de 0.42% de l'écart type de cette fréquence. L'ajustement obtenu par les surfaces de réponse est donc d'excellente qualité et nous avons considéré que nous pouvons donc utiliser les approximations par surface de réponse pour remplacer le modèle éléments finis dans la procédure bayésienne. Ceci a permis de réduire le calcul d'environ 4s pour la solution éléments finis à environ 0.3ms pour la surface de réponse polynomiale (sur une machine Intel Core2 Duo 2GHz), permettant ainsi de ramener le temps de calcul à un niveau raisonnable pour l'utilisation de la procédure d'identification bayésienne.

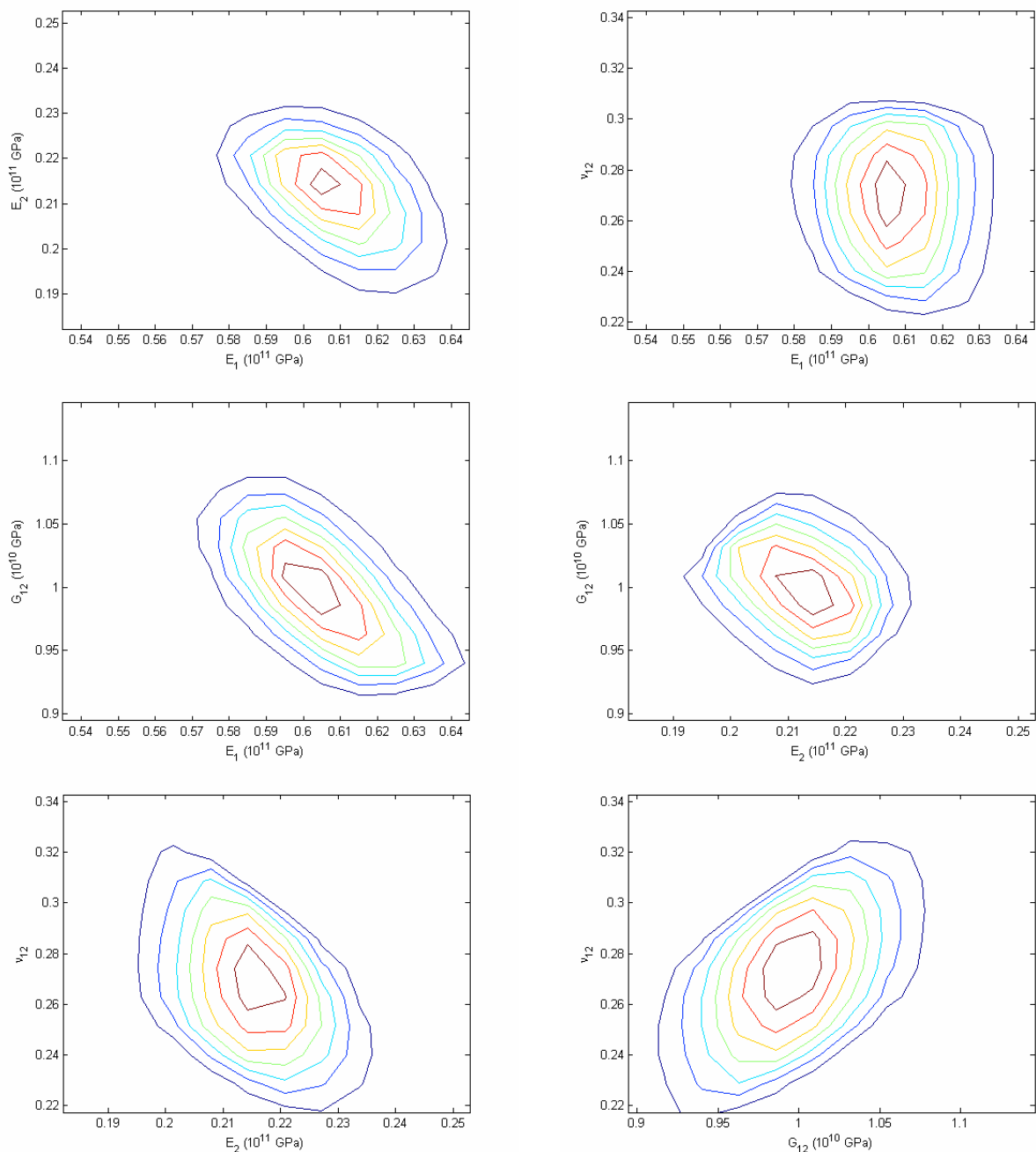
#### 4. Résultats

Pour servir de point de comparaison pour l'identification bayésienne nous donnons tout d'abord dans le Tab. 6 les résultats obtenus en appliquant une identification par moindres carrés (cf. Eq. 1) avec les surfaces de réponse polynomiales construites dans la section précédente.

Paramètre	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (GPa)
Valeur	60,9	22,7	0,217	9,6

Tab. 6. Paramètres identifiés par une approche moindres carrés.

En appliquant la procédure d'identification bayésienne que nous avons détaillée dans la section précédente nous avons obtenus les résultats suivants : la densité postérieure de probabilité des constantes élastiques est représentée dans la Fig. 1. Notez que la densité est quadridimensionnelle, nous l'avons donc illustrée par six coupes en fixant les 2 constantes élastiques non représentées à leurs valeurs moyennes de la densité postérieure de probabilité et traçant ainsi les lignes de niveau de la densité postérieure en fonction des deux constantes élastiques restantes.



**Fig. 1. Densité postérieure de probabilité identifiée.** Cette densité étant quadridimensionnelle nous la représentons en fixant les 2 paramètres non identifiés à leur valeur moyenne. Les 6 graphiques sont donc des coupes de la densité à travers le point de la valeur moyenne.

La densité de probabilité identifiée peut être caractérisée par ses valeurs moyennes et sa matrice de variance-covariance, données dans les tableaux 7 et 8. Comme il n'est pas très aisé d'interpréter directement une matrice de variance-covariance nous donnons également le coefficient de variation des propriétés dans le Tab. 7 ainsi que le coefficient de corrélation entre les paramètres dans le Tab. 8. Notez que les matrices de variance-covariance sont toutes les deux symétriques. C'est pourquoi nous n'en représentons qu'une moitié de chaque dans le Tab. 8. Les variances covariances sont données par la matrice triangulaire inférieure (incluant la diagonale) tandis que les coefficients de corrélation sont donnés par la matrice triangulaire supérieure (hors diagonale).

Paramètre	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (GPa)
Valeur moyenne	60.8	21.3	0.27	9.87
COV (%)	3.05	5.46	12.2	5.96

**Tab. 7. Valeurs moyennes et coefficient de variation (COV) de la densité postérieure identifiée.**



	$E_1$ (Pa)	$E_2$ (Pa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (Pa)
$E_1$ (Pa)	3,45E+18	-0,141	-0,378	-0,626
$E_2$ (Pa)	-3,05E+17	1,36E+18	-0,593	-0,358
$\nu_{12}$	-2,31E+07	-2,28E+07	1,10E-03	0,768
$G_{12}$ (Pa)	-6,85E+17	-2,46E+17	1,49E+07	3,47E+17

Tab. 8. Variance-covariance (matrice triangulaire inférieure) et coefficients de corrélation (matrice triangulaire supérieure) de la densité de probabilité identifiée.

Une étude de convergence a été réalisée pour estimer l'erreur dans les paramètres des Tab. 7 et 8, caractérisent la densité identifiée. En effet les valeurs moyennes et la matrice de variance-covariance dépendent du domaine sur lequel elles sont calculées. Puisqu'il est numériquement impossible d'intégrer sur tout le domaine (de  $-\infty$  à  $\infty$ ) nous devons tronquer la distribution à partir de certaines valeurs. Nous allons estimer l'erreur d'estimation que nous effectuons avec cette troncature par une étude de convergence.

Initialement nous avons commencé par une grille de  $8^4$  points et 50000 simulations de Monte Carlo par point de la grille. Ce calcul a nécessité environ une semaine sur une machine Intel Core2 Duo 2GHz. Pour étudier la convergence nous avons ensuite progressivement élargi le nombre de points de la grille de deux points par dimension à chaque fois. Notez que la taille du pas de la grille est resté le même nous avons tout simplement élargi le domaine en y rajoutant des points supplémentaires. Le domaine final a utilisé une grille de  $16^4$  points avec les bornes qui sont celles de la représentation graphique de la Fig. 1. Les résultats de l'étude de convergence sont donnés dans la Fig. 2.

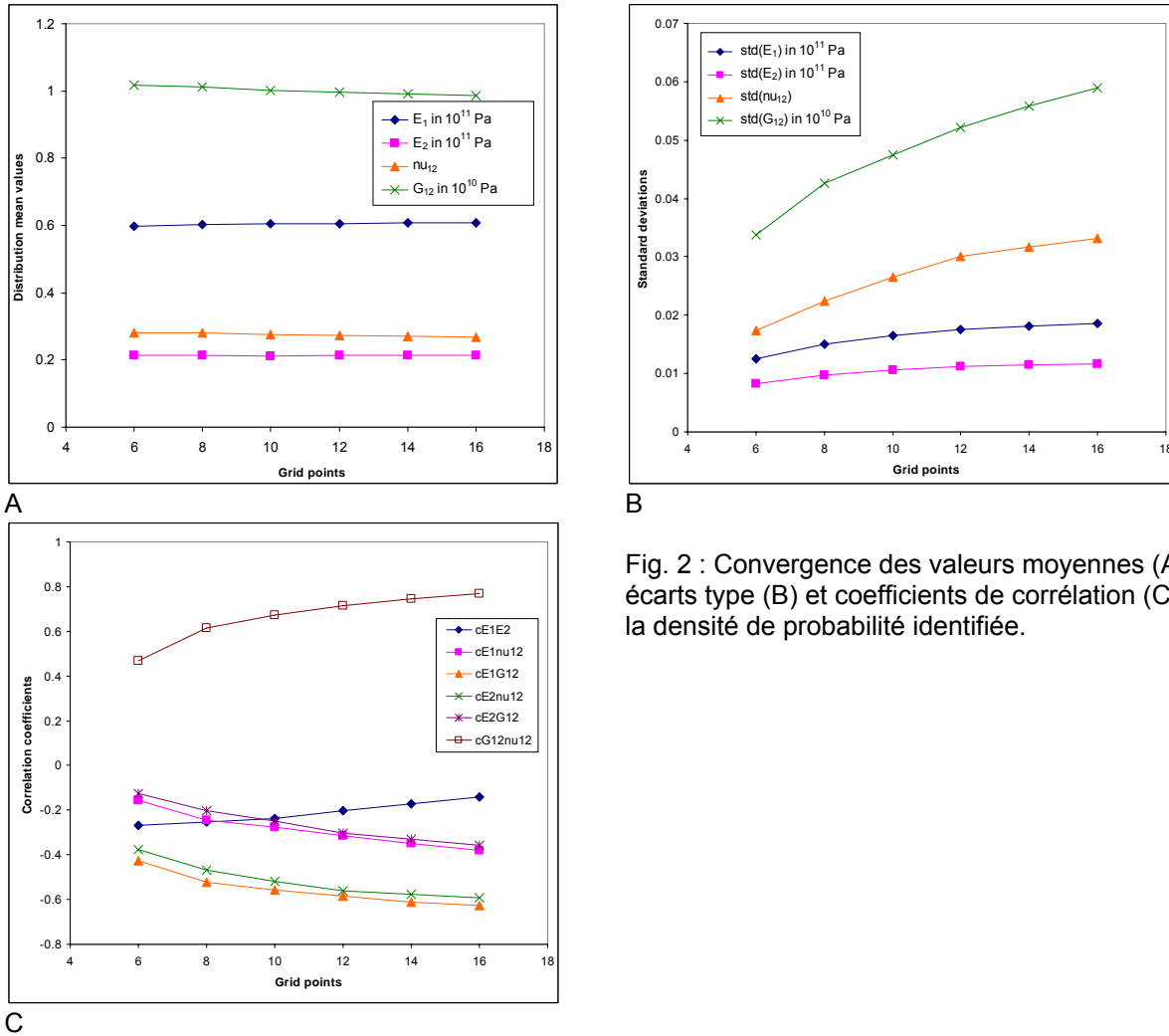


Fig. 2 : Convergence des valeurs moyennes (A), écarts type (B) et coefficients de corrélation (C) de la densité de probabilité identifiée.

Nous constatons que les valeurs moyennes de la densité identifiée ont toutes très bien convergé. L'erreur de troncature la plus importante semble être sur le module de cisaillement, erreur qu'on a estimé à moins de 0,4%.

Les coefficients de la matrice de variance-covariance semblent avoir par contre moins bien convergé. En ce qui concerne les écarts types, la plus grande erreur de troncature semble être à nouveau sur le module de cisaillement, erreur qu'on a estimé à moins de 8%. L'erreur de troncature sur les coefficients de corrélation est estimée à moins de 5% sauf pour le coefficient de corrélation entre  $E_1$  et  $E_2$  qui semble avoir mal convergé. Notez cependant que ces 2 paramètres sont les moins corrélés, la convergence de ce coefficient de corrélation est donc moins critique.

Les erreurs de troncature auraient pu être encore réduites en continuant d'élargir le domaine. Cependant, comme nous sommes en dimension 4 cela devient rapidement très coûteux en temps de calcul. Dans notre cas passer de  $16^4$  à  $18^4$  points sur la grille aurait nécessité une semaine de plus de calculs, même en abaissant le nombre de simulations de Monte Carlo de 50000 à 7000. Nous avons donc décidé d'arrêter à  $16^4$  points, sachant que les valeurs moyennes de la distribution ont bien convergé et que ce ne sont que les coefficients de la matrice de variance co-variance qui comportent des erreurs plus significatives. Sachant cependant que la matrice de variance-covariance des paramètres identifiés est très rarement fournie lors des études d'identification de constantes élastiques nous avons estimé qu'il est important d'obtenir cette matrice même si la précision est seulement d'environ 10%.

En comparant les Tab. 6 et 7 nous pouvons constater que certains paramètres diffèrent légèrement selon qu'ils sont identifiés par l'approche des moindres carrés ou par l'approche bayésienne. Il faut cependant noter que les paramètres identifiés par l'approche bayésienne sont obtenus avec une certaine incertitude (cf. Tab. 7) et que les paramètres obtenus par moindres carrés sont également déterminés avec une incertitude au moins aussi grande que celle des paramètres bayésiens, voire typiquement plus grande [24]. Les écarts entre les Tab. 6 et 7 sont alors cohérents avec les incertitudes qu'on a sur les paramètres.

Le tableau 7 illustre le fait connu mais rarement quantifié, que les paramètres matériaux sont identifiés avec une confiance variable. En particulier, alors que le module longitudinal est connu relativement précisément, le module de cisaillement ou le coefficient de Poisson sont connus avec beaucoup plus d'incertitude. La méthode bayésienne permet de quantifier précisément cette incertitude. Notez cependant que l'incertitude avec laquelle les paramètres sont identifiés dépend de l'essai. Une autre technique expérimentale ou un empilement différent du stratifié aurait mené à une incertitude différente sur les paramètres identifiés. Notez également que la densité de probabilité identifiée n'est pas représentative d'une variabilité inter- ou intra-specimen des paramètres matériaux. Elle n'est représentative que de l'incertitude avec laquelle les paramètres matériaux sont identifiés pour la plaque donnée à partir de l'essai en question.

## 5. Conclusions

Nous avons présenté une approche bayésienne de l'identification des constantes élastiques orthotropes à partir d'essai de vibration. L'approche proposée rend compte d'erreurs de mesure et de modélisation ainsi que d'incertitudes sur les autres paramètres d'entrée du problème. Pour permettre cela, nous utilisons la simulation de Monte Carlo en combinaison avec la méthodologie des surfaces de réponse, ce qui nous a permis d'approximer les fréquences propres par des fonctions polynomiales à faible coût de calcul, ramenant ainsi la procédure à un temps raisonnable. Malgré cette réduction significative des coûts, la procédure reste relativement chère, mais c'est le prix à payer pour pouvoir rendre compte de différentes sources d'incertitude et estimer la confiance avec laquelle les paramètres matériaux sont identifiés. Pour l'identification à partir de mesures de vibration nous avons trouvé que l'incertitude variait de manière significative selon la constante élastique identifiée, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson étant connus le moins précisément. De plus les propriétés étaient également identifiées avec une corrélation non négligeable. Ces incertitudes et corrélations ont été quantifiées et permettent d'avoir un modèle d'incertitudes expérimental pour l'essai considéré.

## Références

- [1] Kernevez, J.P., Knopf-Lenoir Vayssade, C., Touzot, G. et al., "An identification method applied to an orthotropic plate bending experiment", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 1, 1978, pp. 129-139.
- [2] Grediac, M. and Vautrin, A., "A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol 57, pp. 964-968, 1990.
- [3] Rouger, F., Khebibeche, M. and Govic, C., "Non-determined tests as a way to identify wood elastic parameters: the finite element approach", *Proceedings of the Euromech Colloquium 269 Mechanical Identification of Composites*, pp. 82-90, 1990.
- [4] Arafeh, M.H., Knopf-Lenoir Vayssade, C., and Rouger, F., "Conception optimale d'essais de flexion de plaques orthotropes et identification", *Comptes Rendus De l'Académie Des Sciences*, Vol. 321, Série II b, 1995, pp. 351-354.

- [5] Le Magorou, L., Bos, F., and Rouger, F., "Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method", *Composites Science and Technology*, Vol. 62, No. 4, 2002, pp. 591-596.
- [6] Vautrin, A., "Mechanical identification of composite materials and structures", *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Asian-Australasian Conference on Composite Materials*, Kyongju, Korea, pp.1305-1323, 2000.
- [7] De Wilde, W.P., Narmon, B., Sol, H. and Roovers, M., "Determination of the material constants of an anisotropic lamina by free vibration analysis", *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, pp. 44-49, 1984.
- [8] De Wilde, W.P., Sol, H. and Van Overmeire, M., "Coupling of Lagrange interpolation, modal analysis and sensitivity analysis in the determination of anisotropic plate rigidities", *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, California, pp. 1058-1063, 1986.
- [9] Deobald, L.R. and Gibson, R.F., "Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/ Rayleigh-Ritz technique", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124(2), pp. 269-283, 1988.
- [10] Grediac, M. and Paris, P.A., "Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: theoretical and numerical aspects", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195(3), pp. 401-415, 1996.
- [11] Grediac, M., Fournier, N., Paris, P.A., and Surrel, Y., "Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: experiments and results", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, pp. 645-659, 1998.
- [12] Sol, H., "Identification of anisotropic plate rigidities", *PhD dissertation*, Vrije Universiteit Brussel, 1986.
- [13] Papazoglou, V.J., Tsouvalis, N.G., Lazaridis, A.G., "A non destructive evaluation of the material properties of a composite laminated plate", *Applied Composite Materials*, Vol. 3, pp. 321-334, 1996.
- [14] Lai, T.C. and Ip, K.H., "Parameter estimation of orthotropic plates by Bayesian sensitivity analysis", *Composite Structures*, Vol. 34, pp. 29-42, 1996.
- [15] Hua, H., Sol, H., De Wilde, W.P., "On a statistical optimization method used in finite element model updating", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 231(4), pp.1071-1078, 2000
- [16] Daghia, F., De Miranda, S., Ubertini, F., Viola, E., "Estimation of elastic constants of thick laminated plates within a Bayesian framework", *Composite Structures*, Vol. 80, pp. 461-473, 2007
- [17] Pedersen, P. and Frederiksen, P.S., "Identification of Orthotropic Material Moduli by a Combined Experimental/Numerical Approach", *Measurement*, Vol. 10, pp. 113-118, 1992.
- [18] Berger, J.O., *Statistical decision theory and bayesian analysis*, New York – Springer, 1985.
- [19] Kaipio, J. and Somersalo, E., *Statistical and Computational Inverse Problems*, New York – Springer, 2005.
- [20] Gogu, C., Haftka, R. T., Le Riche, R., Molimard, J., Vautrin, A., Sankar, B. V., "Bayesian Statistical Identification of Orthotropic Elastic Constants Accounting for Measurement and Modeling Errors", AIAA paper 2009-2258, *11<sup>th</sup> AIAA Non-Deterministic Approaches Conference*, Palm Springs, CA, 2009.
- [21] Myers, R.H. and Montgomery, D.C., *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> edition, 2002.
- [22] Gürdal, Z., Haftka, R.T. and Hajela, P., *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*, New York – Wiley Interscience, 1998.
- [23] Dickinson, S.M., "The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh's method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 61, No. 1, pp. 1-8, 1978.
- [24] Gogu, C., Haftka, R. T., Le Riche, R., Molimard, J., Vautrin, A. and Sankar, B. V., "Comparison between the basic least squares and the Bayesian approach for elastic constants identification", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 135, No. 012045, 2008.